LA LUNE TOMBE SUR LA TERRE !

LOI de LA CHUTE LIBRE :

L'équation horaire du mouvement est donnée par la relation reliant les espaces parcourus x(m) en fonction du temps t(s) : $x = 0{,}5.g.T^2$ avec $g = 9{,}81 \approx 10$ m/s^2 est l'intensité du champ de gravitation sur Terre équivalent à l'accélération subie par tout objet en chute libre quelle que soit sa masse m.

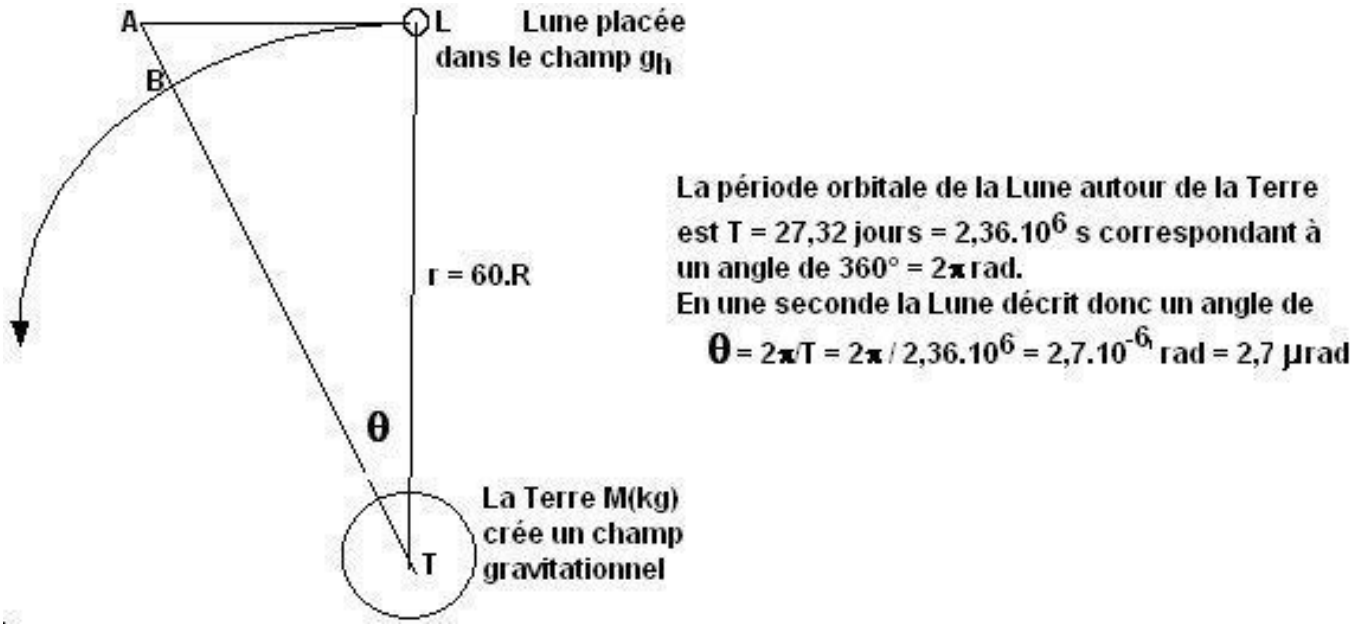
Exemple d'application: Une pomme, lors de la première seconde (t-1s) de sa chute libre tombe donc d'une hauteur de : $x = 0{,}5.10.1^2 = 5$ m. Notez que tout autre objet devrait tomber de la même hauteur si les frottements ne venaient compliquer ce phénomène simple et universel. La différence de densité entre celle de l'atmosphère et celle du corps en chute libre intervient également de façon d'autant plus importante que celles-ci sont voisines (Le cas extrême est illustré par les montgolfières qui tombent négativement).

LA LUNE : Elle est placée dans le champ de gravitation crée parla Terre de masse $M = 6.l0^{24}$kg et de rayon R = 6400 km - Sa distance moyenne à fa Terre est r (rayon orbital) = 384.000 km soit ≈ 60.R. On montre que le champ de gravitation créé par une planète de masse M(kg) diminue comme l'inverse du carré de la distance : $g_r = G.\ M/r^2 = \mathbf{g_0.R^2/r^2} = g_0\ .\ R^2/\ 60^2.\ R^2 = \mathbf{g_0/3600}$ A la distance où se situe la Lune le champ gravitationnel créé par la Terre est 3600 fois plus faible qu'à la surface du sol sur Terre.

Remarque : Une pomme lâchée sans vitesse initiale en ce lieu de l'espace tomberait d'une hauteur 3600 fois plus faible que sur Terre, soit : $x_r = 0{,}5\ .\ g_r\ .\ t^2 = 5 / 3600 = 1{,}38$ mm

NEWTON INTERVIENT

Si la Lune n'était soumise à aucune force elle poursuivrait sa trajectoire qui serait en vertu du PRINCIPE D'INERTIE, rectiligne et décrite à vitesse constante (Mouvement Rectiligne Uniforme).



Un peu de trigonométrie : ***Cos θ = TL / AT = r / AT → AT = r / cos θ***

AT = la distance à laquelle devrait se situer la Lune au bout d'une seconde si elle n'était pas soumise à la force gravitationnelle imposée par la Terre. Or, en raison de cette force, la Lune se trouve en B.

Elle est donc tombée dune hauteur de $\boldsymbol{AB = AT - BT = r / \cos\theta - r = r\,(1 / \cos\theta - 1) \approx r\,\theta^2 / 2}$

Cette dernière transformation $r\,(1 / \cos\theta - 1) \approx r\,\theta^2 / 2$ nécessite une explication (voir page suivante)

L'application numérique donne : $\mathbf{AB = 3{,}84.10^8.\ 2{,}7^2.10^{-12} / 2 = 1{,}38}$ **mm !!!**

La Lune est bien tombée de la même hauteur qu'une pomme placée au même endroit serait tombée !
Seule son énergie cinétique lui permet de tourner autour de la Terre.

La dernière transformation trigonométrique.

Quand Jacques Cazenove a proposé cette démonstration de la chute de la Lune sur la Terre, il a fait l'impasse sur une restriction importante du calcul trigonométrique en fournissant directement le moyen de ne pas s'y fourvoyer. Dans la détermination de AB (Différence de distance entre la position où se trouverait la Lune sans l'attraction exercée par le champ de gravitation terrestre et celle où elle se trouve effectivement), Jacques aurait pu s'arrêter après la transformation suivante : $\boldsymbol{AB = AT - BT = r / \cos\theta - r}$ puisque ***r***, distance moyenne Terre-Lune et $\boldsymbol{\theta}$ sont connus, et passer immédiatement à l'application numérique**.**
Mais une surprise nous aurait attendue car $\mathbf{3{,}84.10^{8} /\cos 2{,}7.10^{-6} - 3{,}84.10^{8} = 0}$ ***et non 1,38mm*** !!

En effet, si cos $2{,}7.10^{-5}$ est encore égal à 0,999999999 sur la plupart des calculatrices, à partir de $2{,}7.10^{-6}$ elles donneront toutes un résultat égal à 1. C'est une question de précision des calculatrices, mais également des tableurs disponibles sur les ordinateurs. L'angle dont il s'agit est si petit que le cosinus correspondant est hors des limites des moyens de calcul, il ne faut pas oublier que nous cherchons une distance qui s'apprécie en millimètres dans une autre qui se chiffre en centaines de milliers de kilomètres.

Nous savons que $\mathbf{1 - (\cos\theta)^2 = (\sin\theta)^2}$ et que le sinus est d'autant plus voisin de l'angle (exprimé en radians) lui-même que l'angle est petit, ce qui est bien le cas ici donc $\boldsymbol{\sin\theta = \theta}$. Nous pouvons donc tenter de calculer le cosinus en passant par le sinus. Celui si étant égal à l'angle il vaut $\mathbf{2{,}7.10^{-6}}$ et au carré $\mathbf{7{,}29.10^{-12}}$, ensuite il ne reste plus qu'à soustraire ce nombre de 1 avant d'en extraire la racine mais la soustraction nous donne déjà 1, c'est-à-dire que nous n'avons rien soustrait du tout, et c'est bien le problème. La solution consiste donc à trouver une grandeur représentative de ce $\boldsymbol{1 / \cos\theta - 1}$ si proche de 1 que sa différence ne se voit pas, et ceci sans passer par $\boldsymbol{\cos\theta}$ mais par $\boldsymbol{\sin\theta}$ ou plutôt $\boldsymbol{\theta}$ qui lui est égal.
Je vous propose donc de vérifier la réalité de l'assertion : $\boldsymbol{r\,(1 / \cos\theta - 1) \approx r\,\theta^2 / 2}$ qui répond à ce souhait et qui revient seulement à vérifier que $\boldsymbol{1 / \cos\theta - 1 \approx \theta^2 / 2}$ **<u>que nous appellons équation A.</u>**

Nous savons que $\mathbf{(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1}$ et que pour les angles petits $\boldsymbol{\theta = \sin\theta}$**.**

Donc, $\mathbf{1 - \theta^2 = (\cos\theta)^2}$ **<u>que nous appellerons équation B</u>** et $\mathbf{1 - (\cos\theta)^2 = \theta^2}$ **<u>équation B</u>'**

En divisant B' par 2 nous obtenons $\mathbf{(1 - (\cos\theta)^2) / 2 = \theta^2 / 2}$

D'après l'équation **A,** que nous cherchons à vérifier, $\boldsymbol{1 / \cos\theta - 1 \approx \theta^2 / 2}$, nous pouvons donc remplacer $\boldsymbol{\theta^2 / 2}$ par $\boldsymbol{1 / \cos\theta - 1}$ ce qui nous donne la nouvelle expression de l'équation précédente :
$\mathbf{(1 - (\cos\theta)^2) / 2 = 1 / \cos\theta - 1}$ et si l'assertion de Jacques Cazenove est exacte nous devrions pouvoir faire converger cette équation vers la forme de celle que nous devons vérifier ($\boldsymbol{1 / \cos\theta - 1 \approx \theta^2 / 2}$)
En multipliant les deux membres par 2 nous obtenons : $\mathbf{1 - (\cos\theta)^2 \approx 2 / \cos\theta - 2}$

En changeant de membre la valeur absolue -2, nous obtenons : $\mathbf{3 - (\cos\theta)^2 \approx 2 / \cos\theta}$

En permutant de la même façon les autres termes de l'équation nous obtenons : $\mathbf{3 - 2 / \cos\theta \approx (\cos\theta)^2}$

D'après l'équation B, $\mathbf{1 - \theta^2 = (\cos\theta)^2}$ donc l'équation précédente devient $\mathbf{3 - 2 / \cos\theta \approx 1 - \theta^2}$

En divisant les deux membres par 2 nous obtenons : $\boldsymbol{1{,}5 - 1 / \cos\theta \approx 0{,}5 - \theta^2 / 2}$

En permutant les deux membres nous obtenons : $\boldsymbol{\theta^2 / 2 - 0{,}5 \approx 1 / \cos\theta - 1{,}5}$

En effectuant les opérations sur les grandeurs numériques nous obtenons $\boldsymbol{\theta^2 / 2 \approx 1 / \cos\theta - 1}$, c'est-à-dire l'équation de départ qu'il fallait trouver au bout du raisonnement.

L'assertion est bien exacte, $\boldsymbol{1 / \cos\theta - 1 \approx \theta^2 / 2}$

$\boldsymbol{\cos\theta}$ n'est pas du domaine visible alors que $\boldsymbol{\theta^2}$ l'est, ce qui rend la solution accessible aux calculettes.